$3^η$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

21.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2 & αν\ -3\le x\le -1 \\ 8x-10 & αν\ -1<x<0 \\ |x-3| & αν\ \ 0\le x\le 3 \end{cases}$$

i) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2f(-1) + f(0)\ -5f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-2)$$

ii) Αν $M(-1\ ,2)$ και $N(3,0)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΜΝ

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2$ είναι ψηλότερα από την γραφική παράσταση της ευθείας ΜΝ

Λύση

i) Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε ότι

$f(-1) = 2(-1)^2 = 2$, $f(0) = |0-3| = 3$, $f(3) = |3-3| = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = |\frac{1}{2} -3| = \frac{5}{2}$, $f(-2) = 2(-2)^2 = 8$ επομένως

$$A = 2\cdot 2 + 3\ -5\cdot 0 - \frac{5}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

ii) $λ_{MN} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{0-2}{3+1} = -\dfrac{1}{2}$ επομένως η ευθεία ΜΝ έχει εξίσωση την

$y = -\dfrac{1}{2}x + β$ και επειδή διέρχεται από το Ν (3, 0) έχουμε

$0 = -\dfrac{3}{2} + β \Leftrightarrow β = \dfrac{3}{2}$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

iii) Θα πρέπει να ισχύει $x^2 > -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x\ -3 > 0$ λύνοντας κατά τα γνωστά

την ανίσωση βρίσκουμε ότι αυτή αληθεύει όταν $x < -\dfrac{3}{2}$ ή $x > 1$

22.

Ένα σχολείο έχει 24 εκπαιδευτικούς από τους οποίους οι 8 είναι άντρες μεταξύ των οποίων 3 είναι φιλόλογοι , επίσης υπάρχουν 10 γυναίκες φιλόλογοι .

Επιλέγουμε έναν εκπαιδευτικό στη τύχη .

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

i) Είναι γυναίκα και όχι φιλόλογος

ii) Είναι άντρας φιλόλογος

iii) Είναι άντρας ή φιλόλογος

iv) Δεν είναι φιλόλογος

Λύση

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι οι γυναίκες εκπαιδευτικοί είναι 16 εκ των οποίων οι 10 είναι φιλόλογοι , άρα οι 6 γυναίκες δεν είναι φιλόλογοι .

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: είναι άντρας οπότε $P(A)=\frac{8}{24}$.

Τότε Α΄ είναι το ενδεχόμενο : δεν είναι άντρας δηλαδή είναι γυναίκα

Με $P(A')=\frac{16}{24}$

και

Φ: είναι φιλόλογος με $P(\Phi)=\frac{13}{24}$

Επομένως

i) Το ενδεχόμενο είναι γυναίκα και όχι φιλόλογος είναι το $A'\cap\Phi'$

με $P(A'\cap\Phi')=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

ii) Το ενδεχόμενο: είναι άντρας φιλόλογος είναι το $A\cap\Phi$

με $P(A\cap\Phi)=\frac{3}{24}$

iii) Το ενδεχόμενο είναι άντρας ή φιλόλογος είναι το $A\cup\Phi$

με $P(A\cup\Phi)=P(A)+P(\Phi)-P(A\cap\Phi)=\frac{8}{24}+\frac{13}{24}-\frac{3}{24}=\frac{18}{24}$

iv) Το ενδεχόμενο : Δεν είναι φιλόλογος είναι το Φ΄

με $P(\Phi')=1-P(\Phi)=1-\frac{13}{24}=\frac{11}{24}$

23.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(x+3)^2 - 5|x+3| - 14 = 0$

ii) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

iii) $\dfrac{2(x+1)}{x-2} + \dfrac{5}{x^2-5x+6} = \dfrac{x+2}{x-3}$

Λύση

i)

$(x+3)^2 - 5|x+3| - 14 = 0 \Leftrightarrow$

$|x+3|^2 - 5|x+3| - 14 = 0$

Θέτω $|x+3| = y$ οπότε έχω

$y^2 - 5y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = 7$ ή $y = -2$

αν $y = 7$ τότε

$|x+3| = 7 \Leftrightarrow x+3 = \pm 7 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -10$

αν $y = -2$ τότε

$|x+3| = -2$ η οποία είναι αδύνατη

ii)

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Θέτω $x^2 = y$ οπότε έχω

$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ή $y = -1$

αν $y = 3$ τότε

$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

αν $y = -1$ τότε

$x^2 = -1$ η οποία είναι αδύνατη

iii)

$$\frac{2(x+1)}{x-2} + \frac{5}{x^2-5x+6} = \frac{x+2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x+1)}{x-2} + \frac{5}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$$

Ε Κ Π $= (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$ τότε

$$(x-2)(x-3)\frac{2(x+1)}{x-2} + (x-2)(x-3)\frac{5}{(x-2)(x-3)} = (x-2)(x-3)\frac{x+2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$2(x-3)(x+1) + 5 = (x-2)(x+2) \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

η $x = 3$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

24.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του λ έτσι ώστε να ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 10$

iv) Αν $\lambda = -2$ να βρείτε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες $\rho_1 = x_1^2$ και $\rho_2 = x_2^2$

Λύση

i)

$B = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 = A$

ii)

$\Delta = 4(\lambda + 1)^2 - 4(\lambda - 1) =$

$= 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 =$

$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2)^2 + 3\lambda^2 + 4 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Συνεπώς η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

iii)

$x_1^2 + x_2^2 = 10$ και με βάση το (i) ερώτημα

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$ **(1)** όμως

$x_1 + x_2 = -2(\lambda + 1)$ και $x_1 x_2 = \lambda - 1$ επομένως η **(1)** γίνεται

$4(\lambda + 1)^2 - 2(\lambda - 1) = 10 \Leftrightarrow$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}$$

iv)

$S = \rho_1 + \rho_2 = x_1^2 + x_2^2$ και $P = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 x_2)^2$

Όταν $\lambda = -2$ είναι

$S = x_1^2 + x_2^2 = 10$ και $P = (-3)^2 = 9$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

25 .

Ο πρώτος όρος $α_1$ μιας γεωμετρικής προόδου είναι $α_1 = 27$ και ο λόγος λ είναι

$λ = -\frac{1}{3}$

i) Να υπολογίσετε τον $4^{ο}$ όρο $α_4$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα S_5 των 5 πρώτων όρων της προόδου

iii) Σε αριθμητική πρόοδο με πρώτον όρο το S_5 της γεωμετρικής προόδου και διαφορά $ω = λ = -\frac{1}{3}$ να βρείτε τον δέκατο όρο $α_{10}$ της αριθμητικής προόδου

Λύση

i)

Έχουμε

$$α_4 = α_1 λ^3 = 27\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 27\left(-\frac{1}{27}\right) = -1$$

ii)

Από τον τύπο : $S_5 = \frac{α_1(λ^5 - 1)}{λ - 1}$ έχουμε ότι

$$S_5 = \frac{27\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{27\left(-\frac{1}{243} - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{27\left(-\frac{244}{243}\right)}{-\frac{4}{3}} = \frac{61}{3}$$

iii)

Θα είναι $α_{10} = α_1 + 9ω =$

$$= \frac{61}{3} + 9\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{52}{3}$$

25.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με

$P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}8$ και $P(A \cap B)' = 0{,}3$.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

i) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B

ii) Πραγματοποιείται μόνο το B

iii) Ακριβώς ένα από τα A, B πραγματοποιείται

iv) Κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται .

Λύση

i)

Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$

Άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= 0{,}9 + 0{,}8 - (1 - P(A \cap B)') =$$

$$= 0{,}9 + 0{,}8 - 1 + 0{,}3 = 1$$

ii)

Πραγματοποιείται μόνο το B σημαίνει ότι πραγματοποιείται το $B - A$ άρα

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1$$

iii)

Ακριβώς ένα από τα A, B πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το $(A - B) \cup (B - A)$ άρα

$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) - P[(A - B) \cap (B - A)] =$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}8 - 2 \cdot 0{,}7 = 0{,}3$.

iv)

Κανένα από τα A ,B δεν πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$

οπότε $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$

26.

i) Να αποδείξετε ότι $2|x-3| = |6-2x|$

i) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\dfrac{|6-2x|+1}{3} - \dfrac{|x-3|-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

β) $|x^2-9| + |6+2x| = 0$

Λύση

i)

$2|x-3| = |2(x-3)| = |2x-6| = |6-2x|$

ii)

α) Με βάση το **(α)** η εξίσωση γίνεται

$$\frac{2|x-3|+1}{3} - \frac{|x-3|-1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$6\cdot\frac{2|x-3|+1}{3} - 6\cdot\frac{|x-3|-1}{2} = 6\cdot\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$|x-3| = 4 \Leftrightarrow (x-3 = 4$ ή $x-3 = -4) \Leftrightarrow$

$x = 7$ ή $x = -1$

β) $|x^2-9| + |6+2x| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2-9 = 0$ και $6+2x = 0 \quad \Leftrightarrow x = -3$

27.

Σε ένα θέατρο η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία 250. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο .

Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από την $2^{η}$ σειρά

i) Αποδείξτε ότι κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της

ii) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει το θέατρο

iii) Την πρώτη παράσταση την παρακολούθησαν 100 θεατές ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζότανε. Ποια είναι η παράσταση κατά την οποία για πρώτη φορά γέμισε το θέατρο;

Λύση

i)

Έστω ν το πλήθος των σειρών του θεάτρου και ω η διαφορά της προόδου τότε από τα δεδομένα έχουμε

$\alpha_1 = 70$, $\alpha_\nu = 250$, $\alpha_{\nu-1} = \alpha_2 + 140$ **(1)**

αφού $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$ λόγω των **(1)** έχουμε

$250 = \alpha_2 + 140 + \omega \Leftrightarrow$

$250 = \alpha_1 + \omega + 140 + \omega \Leftrightarrow$

$250 = 210 + 2\omega \Leftrightarrow \omega = 20$

Άρα κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της

ii)

Τώρα από τον τύπο

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega \Leftrightarrow$

$250 = 70 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow \nu = 10$

Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι ίσο με

$$S_{10} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_{10})10}{2} = \frac{(70 + 250)10}{2} = 1600$$

iii)

Ο αριθμός των θεατών κάθε παράστασης σχηματίζει γεωμετρική πρόοδο με πρώτον όρο $\alpha_1 = 100$ και λόγο $\lambda = 2$

ψάχνουμε να βρούμε εκείνο τον όρο της γεωμετρικής προόδου ο οποίος είναι ίσος με 1600

Αν α_k είναι ο ζητούμενος όρος τότε από τον τύπο $\alpha_k = \alpha_1 \lambda^{\kappa-1}$ με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

$1600 = 100 \cdot 2^{k-1} \Leftrightarrow 2^{k-1} = 16 \Leftrightarrow$

$2^{k-1} = 2^4 \quad \Leftrightarrow k = 5$. Άρα το θέατρο γέμισε για πρώτη φορά στην $5^{η}$ παράσταση .

28.

Έστω Α , Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν

$P(A-B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ και $P(B'-A)=\frac{1}{2}$

i) Να βρείτε την P(A)

ii) Δείξτε ότι $P(B)=\frac{1}{4}$

iii) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) Ένα μόνα από τα Α, Β πραγματοποιείται .

β) Το πολύ ένα από τα Α, Β πραγματοποιείται

Λύση

i)

$$P(A-B)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(A)-\frac{1}{20}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{3}{10}$$

ii)

$$P(B'-A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$P(B')-P(B'\cap A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1-P(B)-[P(A)-P(A\cap B)]=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1-P(B)-\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$P(B)=\frac{1}{4}$$

iii)

α) $P[(A-B)\cup(B-A)]=$

$$=P(A-B)+P(B-A)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{9}{20}$$

β)

Το πολύ ένα από τα Α, Β πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο : $(A \cap B)'$

οπότε

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

29.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - \lambda x + 6}{x^2 - 6x + 9}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ να βρείτε το λ

iii) Αν λ = 5 δείξτε ότι $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

iv) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι ψηλότερα από τον άξονα των x

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $x^2 - 6x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ επομένως $A_f = \mathbb{R} - \{3\}$

ii)

Πρέπει $f(1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7-\lambda}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 5$

iii)

Για λ = 5 έχουμε $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^2} = \dfrac{x-2}{x-3}$

iv)

Πρέπει να ισχύει $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow$

$x < 2$ ή $x > 3$

30 .

Έστω η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Δείξτε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ίση με $\Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3$

ii) Να λυθεί η ανίσωση $\Delta < 0$

iii) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες

iv) Αν x_1 , x_2 οι άνισες ρίζες της εξίσωσης , να λύσετε την ανίσωση $|x_1 + x_2 + 2| < 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 - 4 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4 = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3$

ii)

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 3 < 0$

Οι ρίζες του τριώνυμου $\Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3$ είναι οι $\lambda = \frac{3}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

το πρόσημο του τριώνυμου φαίνεται στον πίνακα

λ	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Πρόσημο του Δ		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $\Delta < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$

iii)

Θα πρέπει $\Delta > 0$ πράγμα που όπως φαίνεται από τον πίνακα του **(ii)** ισχύει όταν

$\lambda < -\frac{1}{2}$ ή $\lambda > \frac{3}{2}$

iv)

Με την προϋπόθεση ότι $\lambda < -\frac{1}{2}$ ή $\lambda > \frac{3}{2}$ **(1)** από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 2\lambda - 1$ επομένως

$|x_1 + x_2 + 2| < 1 \Leftrightarrow |2\lambda - 1 + 2| < 1 \Leftrightarrow |2\lambda + 1| < 1 \Leftrightarrow$

$-1 < 2\lambda + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < 2\lambda < 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 0$ και λόγω των **(1)**

$-1 < \lambda < -\frac{1}{2}$